Más Allá del Movimiento Armónico Simple: un Ejemplo Académico Sobre el Uso Didáctico del Ordenador

Arribas Garde, E.
Depart. de Física Aplicada. Universidad de Castilla-La Mancha.
Hurtado Santón, E.
Escuela Politécnica de Ingeniería Técnica Agrícola. Ciudad Real.
Sanjosé López, V.
Depart. de Didàctica de les Ciències Experimentals. Universitat de València

Resumen

Se estudia la dinámica de un movimiento en el que la aceleración de la partícula es proporcional a $-x^3$, que consideramos como un ejemplo académico interesante que puede ampliar los esquemas cognitivos de los estudiantes, y obtenemos un oscilador cuyo período depende linealmente de la inversa de la velocidad lineal. Se resuelve con ayuda del del ordendor y también de forma analítica. Mediante un razonamiento energético, relacionamos la amplitud y la velocidad inicial. De modo somero, se comentan también los movimientos con aceleración proporcional a $-x^5$ y $-x^7$.

Introducción

En la casi totalidad de cursos de física general se estudian los movimientos periódicos, uno de cuyos ejemplos típicos es el movimiento armónico simple (MAS).

A pesar de que este tipo de modelo de interacción ha producido –y sigue produciendo– buenos resultados en diversos ámbitos de la física, el hecho de que sea éste el único caso que se analiza en profundidad en las aulas (cosa que podríamos decir también de otros temas), nos parece que puede dar lugar a la creación de hábitos repetitivos y de esquemas conceptuales pobres y en exceso simpificados en nuestros alumnos.

Nuestro propósito aquí es contribuir al enriquecimiento de los hábitos científicos de los estudiantes a través del análisis de ejercicios académicos no usuales, así como proveerles de herramientas de búsqueda y resolución de los mismos, en este caso con ayuda del ordenador. Este se revela como un instrumento didáctico eficaz y permite, en un corto espacio de tiempo, profundizar en aspectos relativos a la modelización, tan importante en la educación científica de nuestros alumnos.

1.–El Movimiento Armónico Simple

Un movimiento se dice que es

periódico cuando se repite a intervalos regulares de tiempo. Este tiempo característico entre oscilaciones se denomina período y la frecuencia del movimiento es el número de oscilaciones del sistema por unidad de tiempo.

Para que un sistema oscile respecto de una posición de equilibrio necesitamos que se cumplan dos condiciones físicas (Arfken et al., 1984).

1) La existencia de una fuerza o momento de torsión con carácter restaurador que actúe cuando el cuerpo no está en su posición de equilibrio.

2) El cuerpo que realiza las oscilaciones debe poseer inercia, bien sea a la traslación o a la rotación.

La forma más sencilla de oscilación es el movimiento armónico simple (M.A.S.) ampliamente estudiado en la asignatura de Física General durante el primer año de toda carrera científica (Tipler, 1985). El caso más familiar consiste en el movimiento unidimensional de un cuerpo de masa m unido a un muelle horizontal de constante elástica k, el cual obedece la ley de Hooke si las oscilaciones son pequeñas. Dicho muelle ejerce una fuerza restauradora proporcioal a x, siendo x el desplazamiento de la masa medido a partir de su posición de equilibrio. Aplicando la 2.ª ley de Newton obtenemos una aceleración que es proporcional y de signo opuesto al desplazamiento

$$a = -\omega^2 x \qquad (1)$$

Siendo la frecuencia angular ω. constante y de valor.

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

es constante y, por tanto el período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\ \sqrt{\omega/k} \qquad (2)$$

La ecuación diferencial que gobierna este movimiento armónico simple es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (3)$$

Y su solución es:

$$x\ (t) = A \cos\ (\omega t + \phi) \qquad (4)$$

Siendo A y ϕ dos constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales de problema. Supondremos que en el instante inicial la partícula está en el origen y tiene una velocidad V_o dirigida hacia la derecha, lo cual nos conduce a:

$$x\ (t) = \frac{V_o}{\omega}\ \text{sen}\ \omega t \qquad (5)$$

Donde vemos que la amplitud es directamente proporcional a la velocidad inicial.

2.–ACELERACIÓN PROPORCIONAL A $-X^3$

En la ecuación (1) es fundamental que

el exponente de la x sea impar, para que la fuerza sea restauradora y obtengamos un movimiento oscilatorio. Nosotros hemos estudiado el caso en el que dicho exponente vale 3, y a este movimiento lo llamaremos movimiento periódico 3(MP3).

Por simplicidad hemos elegido que la constante de proporcionalidad con dimensiones de L^{-2} T^{-2}, sea de valor uno y por tanto la aceleración será:

$$a = -x^3 \qquad (6)$$

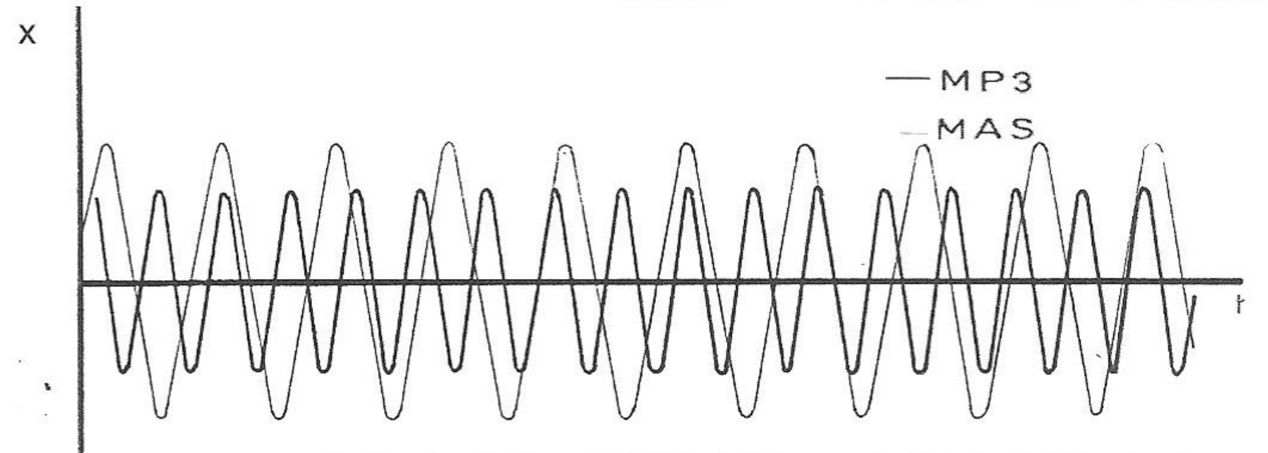
Y lo hemos comparado con el M.A.S. con ω= 1 rad/s, es decir, con

$$a = -x \qquad (7)$$

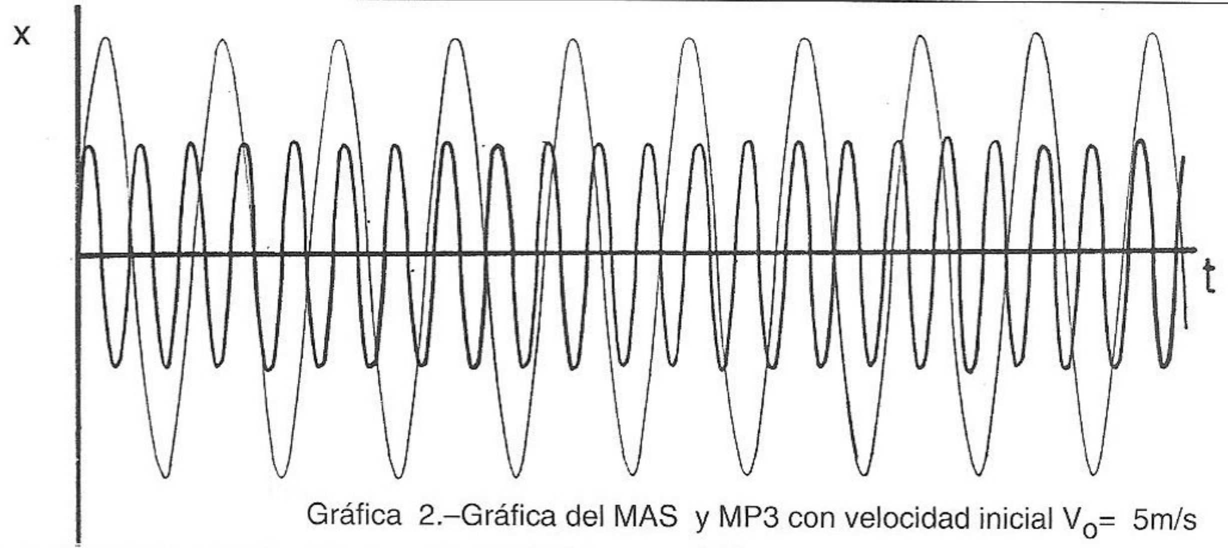
Las condiciones iniciales para ambos movimientos son las mencionadas más arriba.

El período del M.A.S. de la ecuación (7) vale 2π segundos y su amplitud es de V_0 metros, como se deduce de (5) con ω=1 rad/s.

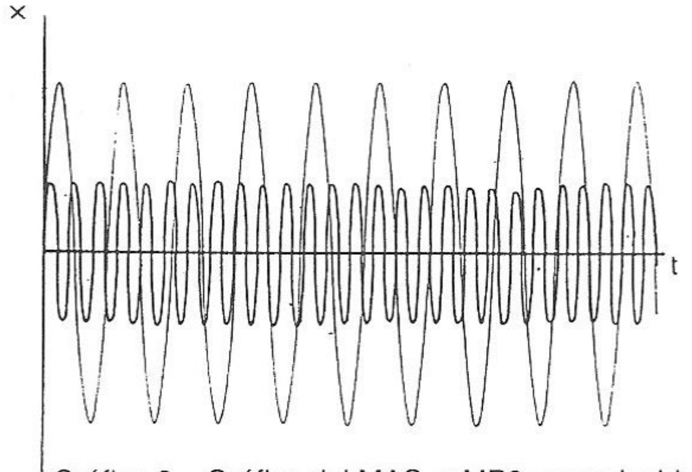
En los gráficos 1 y 4 se muestra la evolución temporal del desplazamiento para diferentes velocidades iniciales.



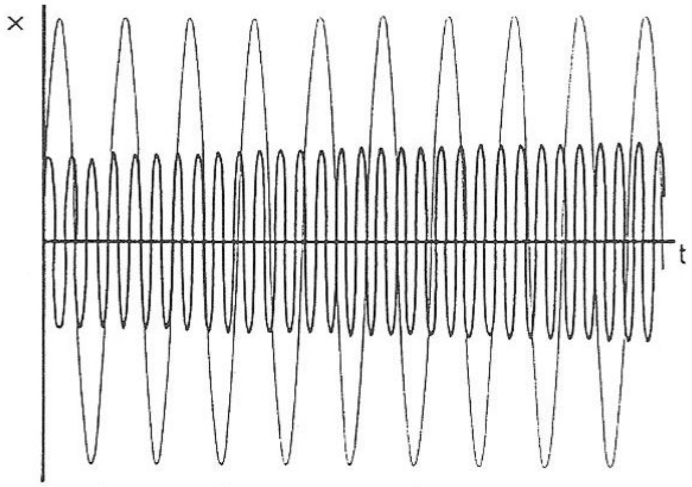
Gráfica 1.–Gráfica del MAS y MP3 con velocidad inicial V_0= 3 m/s



Gráfica 2.–Gráfica del MAS y MP3 con velocidad inicial V_0= 5m/s



Gráfica 3.– Gráfica del MAS y MP3 con velocidad inicial V_o = 7 m/s



Gráfica 4.– Gráfica del MAS y MP3 con velocidad inicial V_o= 9 m/s

Vo(m/s)	Período M.A.S.(s)	Período MP3(s)	Cociente TM.A.S./TMP3
1	2π	6.236	1.0076
2	2π	4.408	1.4254
3	2π	3.600	1.7453
4	2π	3.118	2.0151
5	2π	2.788	2.2537
6	2π	2.546	2.4679
7	2π	2.356	2.6669
8	2π	2.204	2.8508
9	2π	2.078	3.0237
10	2π	1.972	3.1862

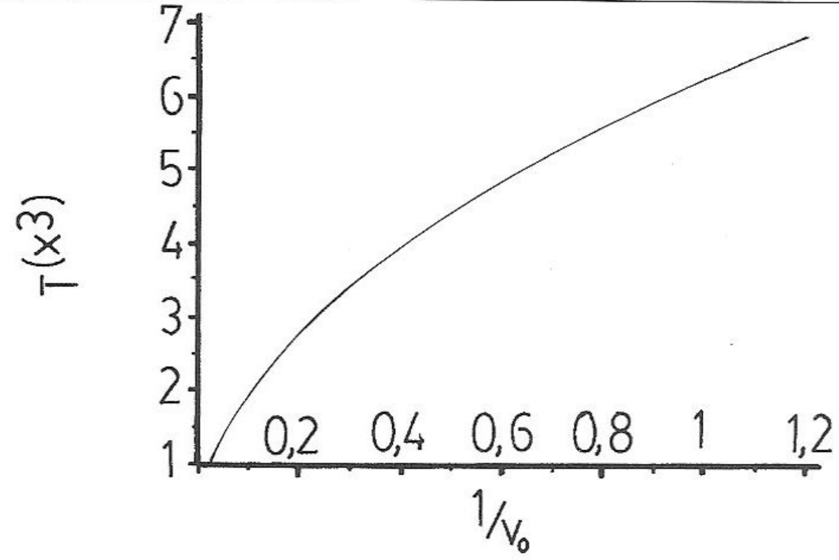
Tabla 1.–Período del M.A.S y del MP3 en función de la velocidad inicial.

A diferencia del M.A.S., MP3 es un movimiento periódico, pero cuyo período temporal depende de la velocidad inicial que tiene la partícula cuando pasa por el origen. En la Tabla 1 recogemos el período del M.A.S., el período del MP3 y su cociente para diferentes velocidades iniciales.

Cuando la velocidad inicial de la partícula es cercana a 1 m/s el período del MP3 es muy similar al del M.A.S. Conforme aumenta la velocidad el período del MP3 va disminuyendo. Podemos ajustar estos datos experimentales mediante la siguiente parábola

$$T_{MP3} = 6.241 \sqrt{1/V_0}$$

Con un coeficiente de correlación de R=1.00. En la gráfica 5 representamos esta correlación.



Gráfica 5.–

Período del MP3 frente a la inversa de la velocidad inicial.

Los anteriores períodos y gráficas los hemos obtenido mediante un sencillo pero eficaz programa de ordenador escrito en Basic, el cual funciona sobre un ordendor personal compatible con el estandar. Esencialmente en el programa resolvemos la ecuación diferencial (6), suponiendo que el movimiento entre t y t+dt es uniformemente acelerado (Gradshteyn y Ryzhit, 1983). Evidentemente esto nos obliga a que el incremento de tiempo sea mucho menor que 1, habiendo utilizado dt= 10^{-3}s.

3.–Solución Analítica

Además del cálculo con el ordendor, el MP3 puede ser resuelto de forma analítica, aunque algo tediosa.

Partiendo de una aceleración:

$$\frac{dV}{dt} = -x^3$$

Podemos multiplicar y dividir por dx para eliminar el tiempo y poder separar las variables v y x.

Integrando, haciendo uso de las condiciones iniciales obtenemos:

$$\varpi = \sqrt{V_0^2 - x^4/2}$$

Nuevamente separando las variables y haciendo uso de las condiciones iniciales llegamos a:

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{V_0^2 - x^4/2}}$$

Para resolver esta integral recurrimos a la expresión 3.131.5 de la página 219 de la referencia Gradshteyn y Ryzhik (1983) y obtenemos:

$$t = \frac{1}{V_0} F(\lambda, \sqrt{1/2})$$

Siendo

$$\lambda = \mathrm{sen}^{-1} \sqrt{\frac{2x^2}{x^2 + 2 V_0}}$$

y F es la integral elíptica de primera especie de módulo $\sqrt{0.5}$. Para más detalles sobre estas funciones puede consultarse la página 904 de la referencia Ohamán (1985). De la ecuación (12) es prácticamente imposible despejar x en función del tiempo y obtener la gráfica del movimiento. Por tanto el ordenador se nos muestra como una eficaz herramienta que nos simplifica bastante el cálculo matemático que lleva asociado la Física.

4.–RAZONAMIENTO ENERGÉTICO

En el M.A.S. a partir de la ecuación

$$(1/2)\, K A^2 = (1/2)\, m V_0^2 \quad (14)$$

que expresa la conservación de la energía, es decir, la igualdad entre la energía cinética máxima, en el origen y la energía potencial máxima, en el punto de máxima elongación, obtenemos

$$A = V_0 \quad (15)$$

(recuérdese que se ha elegido k/m = 1 por comodidad)

En el M.P.3 la energía potencial tiene una expresión Ep= $1/4\ x^4$ y la ecuación que expresa la conservación de la energía sería

$$(1/4)\, A^4 = (1/2)\, V_0^2 \quad (16)$$

A partir de ella obtenemos la siguiente relación entre la amplitud y la velocidad inicial

$$A = (2)^{1/4}\, V_0\, 1/2 \quad (17)$$

La gráfica 6 muestra la amplitud de MP3 y del M.A.S. frente a la velocidad inicial V_0.

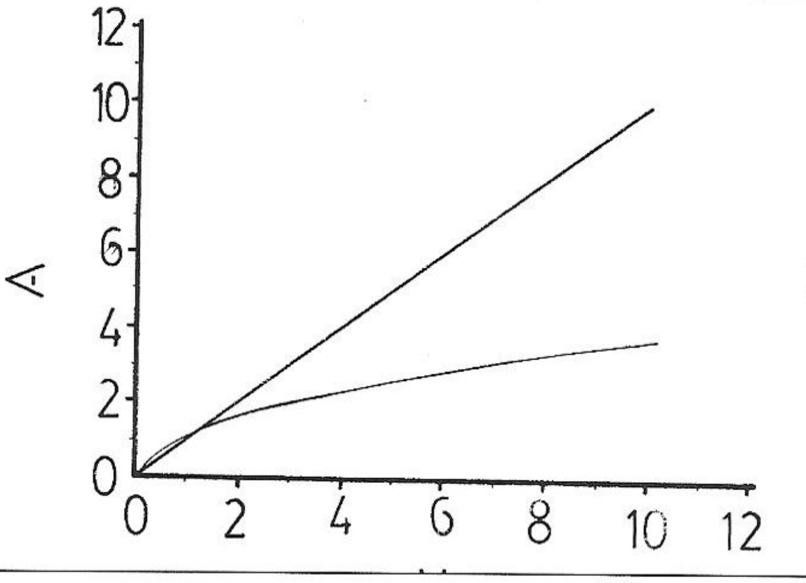
Obsérvese que pa v_0 menor que $\sqrt{2}$ la amplitud del MP3 es mayor que la del M.A.S., mientras que para V_0 mayor que $\sqrt{2}$ la amplitud del M.A.S es mayor que la del MP3.

sometida a una aceleración:

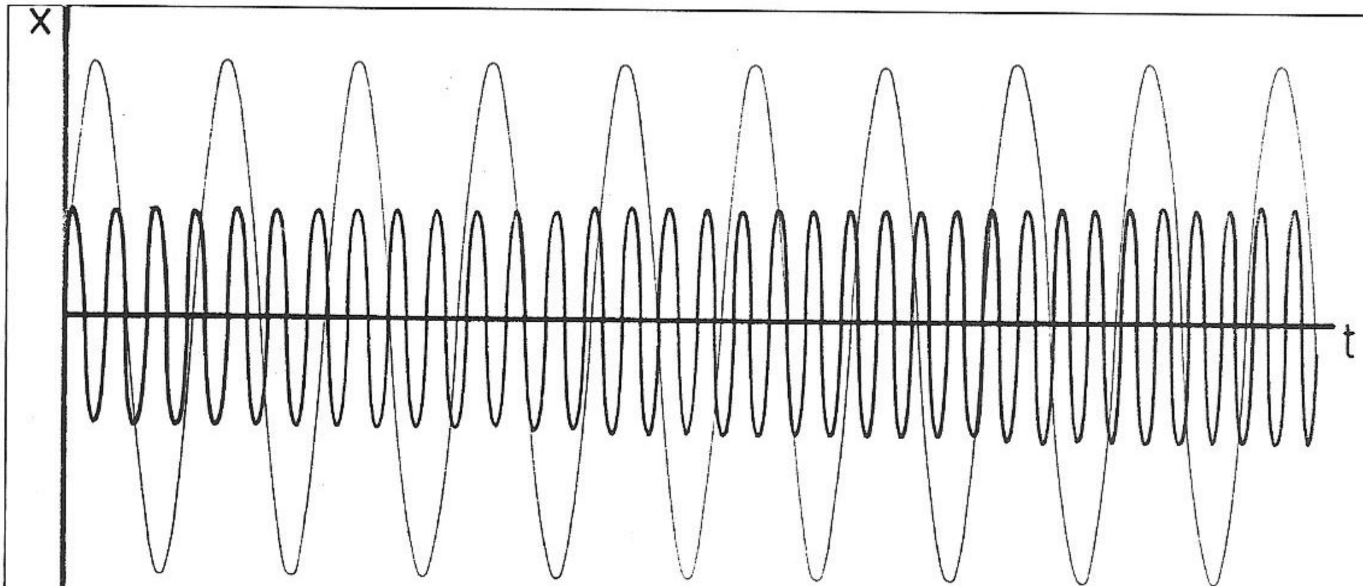
$$a = -x^5 \quad (18)$$

$$a = -x^7 \quad (19)$$

respectivamente. Al movimiento



Gráfica 6.– Amplitud del movimiento para el MAS y MP3 frente a la velocidad inicial.

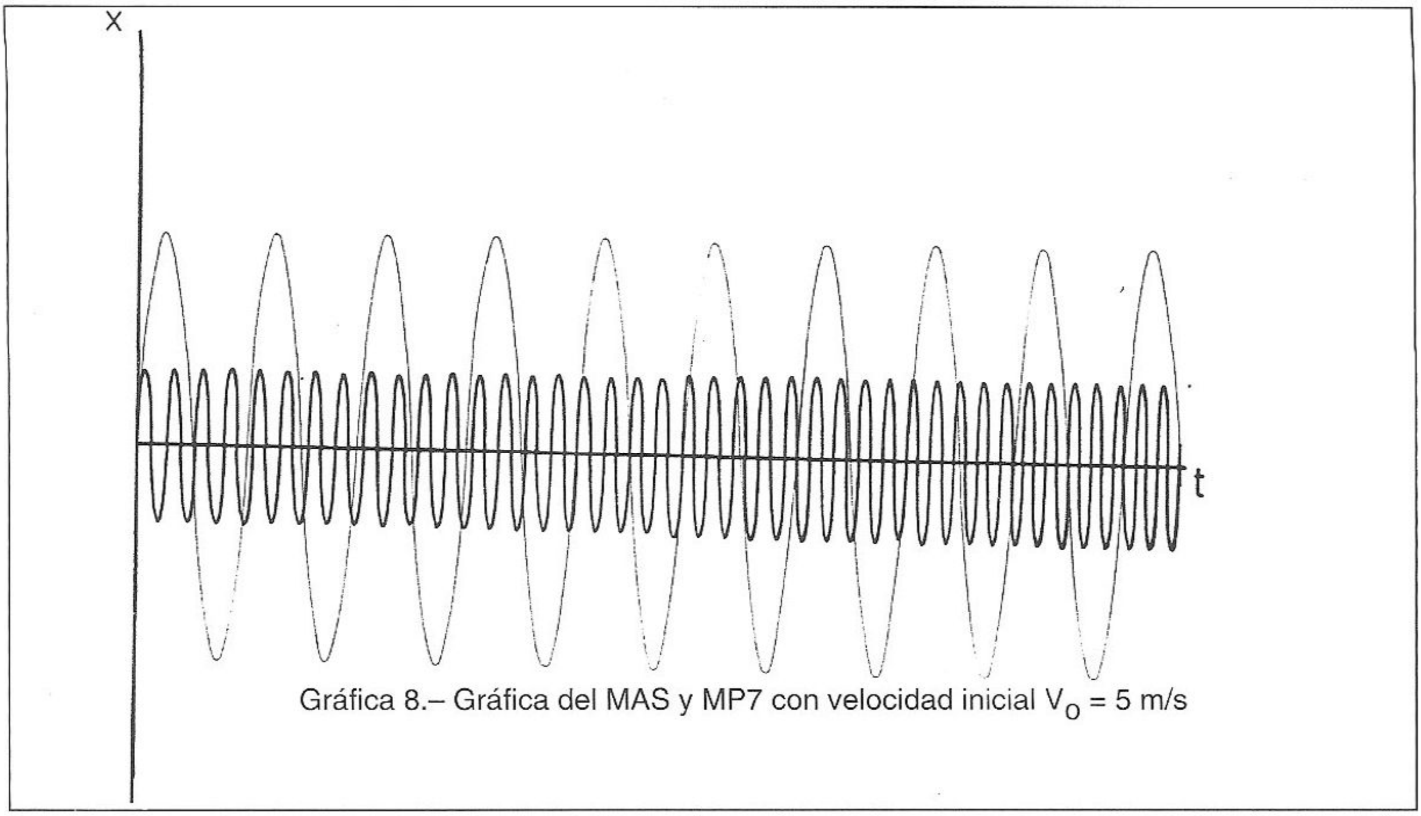


Gráfica 7.– Gráfica del MAS y MP5 con velocidad inicial V_0 = 5 m/s

5.–ACELERACION PROPORCIONAL A $-x^{2n+1}$

En las gráficas 7 y 8 mostramos la evolución temporal de una partícula periódico resultante lo llamamos MP5 y MP7.

Se observa que los movimientos son periódicos, análogamente al caso anterior.



Gráfica 8.– Gráfica del MAS y MP7 con velocidad inicial $V_0 = 5$ m/s

Conclusiones

En este trabajo hemos analizado ejemplos de modelos de interacciones que conducen a movimientos periódicos y que se apartan de los casos simples que, de forma casi exclusiva, se estudian en los cursos básicos de física.

Hemos mostrado cómo con ayuda del ordenador que se revela como una herramienta didáctica eficaz, es posible abordar y resolver cuestiones relevantes de estos problemas y, con ello, llevar a los estudiantes hacia ámbitos más amplios que los que normalmente se abordan. Creemos que, a través de esta clase de ejercicios académicos, podemos aumentar la creatividad y las actitudes científicas de investigación en nuestros alumnos, evitando la constricción conceptual que supone el mostrar una y otra vez los mismos ejemplos y de una manera similar. Ello conduce, a nuestro juicio, a la creación de esquemas de comportamiento repetitivos que en absoluto favorecen la construcción de conocimientos en ciencias.

Bibliografía

Arfken, G.B.; Grikking, D. F.; Kelly, D. C. y Priest, J. 1984. University Physics. Academic Press.

Gradshteyn, I. S. y Ryzhik, I. M. 1983. Table of Integrals, Series and Products. Academic Press.

Ohanian, H. C. 1985. Physics. W. W. Norton Company, N. Y.

Tippler, P. A. 1985. Física. Ed. Reverté, Barcelona.