Algunas consideraciones sobre el "sencillo ejercicio" propuesto por D. Gil et al. en un artículo reciente de esta revista (1)

J. Félix Fuertes
Departamento de Física
Universidad de Oviedo

El cambio didáctico en la enseñanza y aprendizaje de la Física es, a medida que avanza el tiempo, tanto más necesario, por cuanto la práctica de la enseñanza actual se va degradando hasta límites insospechados, en un intento de simplificación y efectividad, y por que la utilidad de la Física, en estos tiempos de especialización, se va centrando, cada vez más, en los procesos de planteamiento y solución de problemas, que en los contenidos.

En este contexto, las aportaciones de trabajos como los de esta revista son cada vez de mayor valor, no sólo para Enseñanzas Medias, sino, acaso con mayor interés, para la Enseñanza Superior, donde el descuido por estos temas es bastante general. Un ejemplo valioso es el trabajo de D. Gil et al. que nos ocupa (1), sobre planteamientos incompletos y erróneos en la resolución de problemas, que se dan también con bastante frecuencia en la enseñanza superior, aunque con sólo un mayor grado de complejidad formal; gran parte de los defectos reseñados en el excelente análisis mencionado, son acentuados por los adornos de un aparato algebraico sofisticado.

La intención de esta nota es hacer algunas consideraciones que pueden resultar de utilidad sobre el "sencillo ejercicio" propuesto, tanto en el propio planteamiento, como en la resolución detallada, no descrita explícitamente en el trabajo mencionado, que, si bien puede parecer elemental, no lo es tanto en la práctica cotidiana.

El ejercicio en cuestión es como sigue:

Un objeto se mueve a lo largo de su trayectoria según la ecuación:

$$e = 25 + 40t - 5t^2$$

(e en metros cuando t en segundos):

¿Qué distancia habrá recorrido a los cinco segundos?

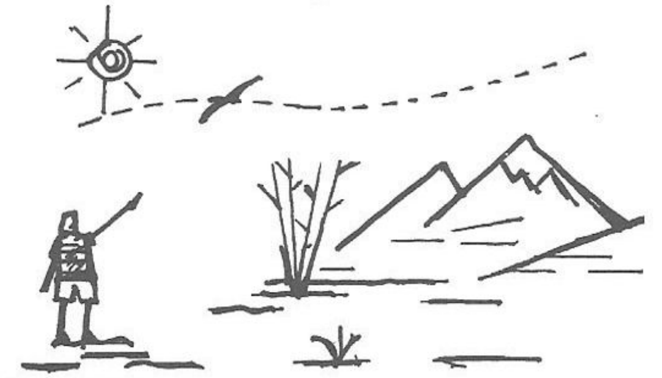
En principio deben hacerse algunas consideraciones concretas sobre su enunciado, incompleto y confuso, cosa por lo demás bastante común en los ejercicios propuestos en muchos libros de Física. Deficiencias, en efecto, para las que el artículo en cuestión, ofrece un detallado análisis y soluciones de forma general, y de las que esta nota pretende ser, en parte, un ejemplo concreto.

Así, tanto la trayectoria, como las magnitudes que intervienen en su expresión, y la distancia recorrida, no están correctamente definidas, a juzgar por el enunciado. El conflicto, bastante general, se evita si, desde un principio, se apoyara el estudio de la cinemática en el álgebra vectorial, de una forma rigurosa, que ofrece, con la única dificultad inicial de familiarizar al alumno con la necesidad de "señalar" los diferentes puntos que ocupa un móvil mediante un vector (fig. 1a), soluciones claras para todas las situaciones posibles y exentas de ambigüedades, frente a la artifiosidad y confusionismo que conlleva el reducir el movimiento a componentes de desplazamientos unidireccionales.

En efecto, una trayectoria, definida como la colección sucesiva y continua de los puntos que va ocupando el móvil en el espacio tridimensional, a medida que discurre el tiempo, y expresada a través de los sucesivos vectores de posición de cada punto, referidos éstos a un determinado sistema cartesiano, contiene en sí, toda la información necesaria para resolver cualquier tipo de problema referido al móvil, operando adecuadamente con las magnitudes cinemáticas (Fig 1b). El problema del olvido recurrente del sistema de referencia queda así evitado también, por ser estrictamente necesario para describir el movimiento.

Por otra parte, la métrica asociada al espacio vectorial que sirve de descripción para el movimiento, da un sentido unívoco a la distancia *d* entre dos puntos (módulo del vector diferencia de los vectores de posición que determinan ambos puntos; ¡Cantidad siempre positiva!), (Fig 2a). De esta

Fig. 1a



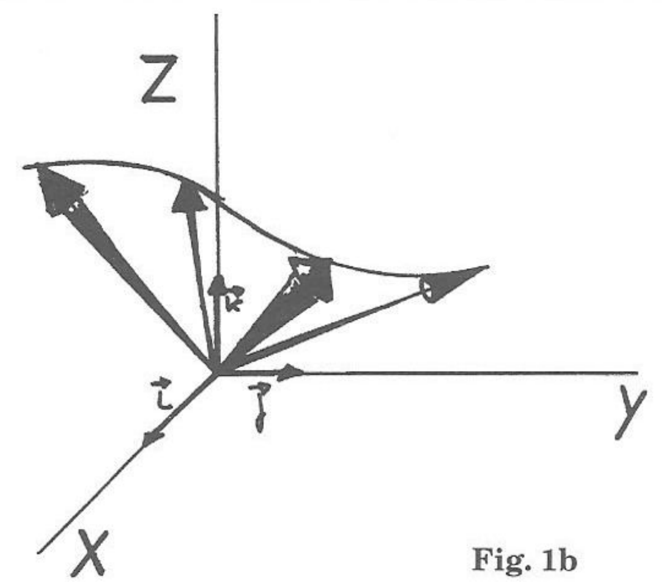


Fig. 1b

manera, la distancia recorrida, que más propiamente debe llamarse **desplazamiento** (acumulación sucesiva de las distancias elementales entre puntos infinitamente próximos, que el objeto va ocupando, "paso a paso", en diferentes "emplazamientos" y que coincide con la longitud de la trayectoria) tiene también una definición operativa unívoca; como el desplazamiento elemental -dr-, definido como el vector diferencia entre dos posiciones infinitamente próximas y contiguas, está perfectamente caracterizado, pues, de una posición a otra, se puede ir por muchos caminos, y dicho vector determina unívocamente el camino correcto. (Fig 2b). La **distancia** es entonces una magnitud propia del espacio formal empleado para la representación del movimiento, antes que ser algo ligado al propio móvil; en tanto que el **desplazamiento** es una

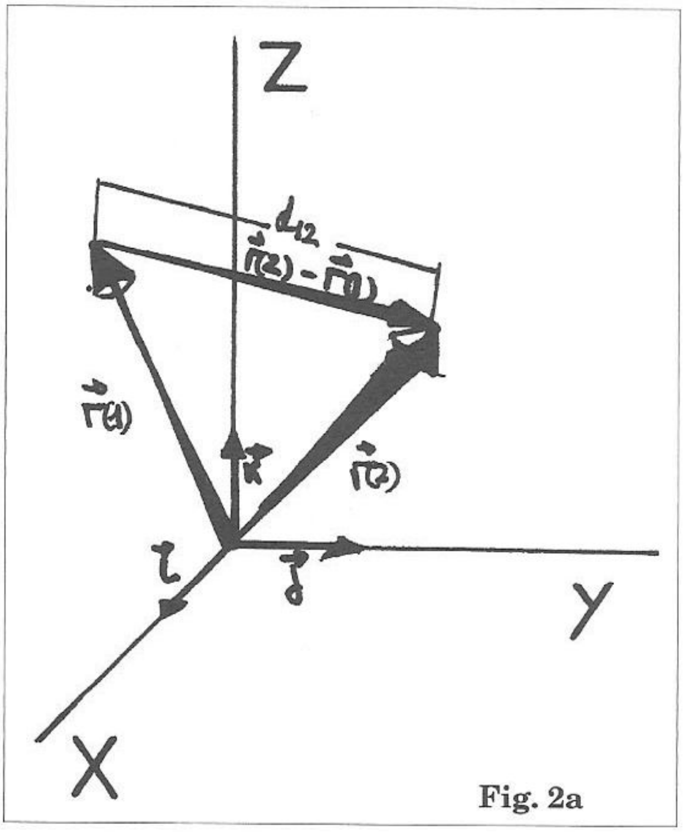


Fig. 2a

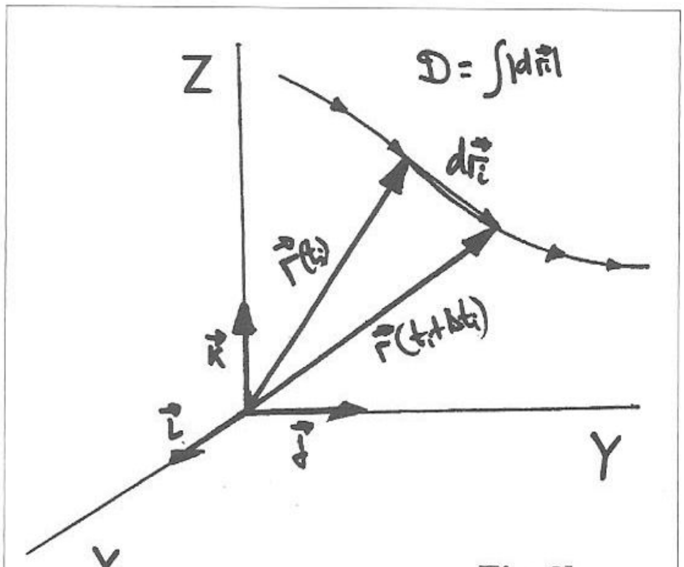


Fig. 2b

magnitud más propia de la evolución de la posición del cuerpo dentro del espacio físico en el que se mueve.

Tampoco se debe hablar de espacio recorrido, pues éste -el espacio-, más bien es un concepto mucho más amplio: el "receptáculo" que nos rodea donde las diferentes posiciones que determinan la trayectoria tienen lugar; descrito de una forma rigurosa a través del espacio vectorial asociado: un concepto puramente formal, para describir la entidad real que nos rodea y donde tienen lugar los hechos que se tratan de estudiar. Debe intentarse así, desde un principio, inculcar el proceso más elemental que está en la base de toda construcción de cualquier teoría Física: la representación de una realidad Física a través de construcciones formales, que se aproximan a la realidad tanto como se quiera (o pueda), evitando, de esta manera, la preconcepción endémica y errónea, y extremadamente extendida, que difícilmente es subsanable, de una Física puramente formalista más o menos sofisticada.

De esta manera, la ecuación de la trayectoria propuesta permite un análisis rico, en matices y una solución rigurosa. Así, más propiamente se debería expresar como:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0)+ v(0)t -1/2\mathbf{a}t^2, \qquad (1)$$

(se evitan los datos concretos para una solución más amplia)

con **r**(0), **v**(0) y **a** paralelos. Que corresponde, como es obvio, a un movimiento uniformemente acelerado unidireccional, (¡No rectilíneo - una recta no puede tener puntos dobles como en este caso-!, pues es, más propiamente, una parábola límite, recta con retroceso, si se quiere) como corresponde a todo movimiento uniformemente acelerado, que es parabólico, en el plano determinado por **v**(0) y ***a***, que, siendo paralelos, en este caso, dan la parábola límite, de abertura cero.

Esta alineación de los tres vectores cinemáticos que intervienen en la determinación de la trayectoria, pueden expresarse en función de un mismo vector unitario -sea el **k**, por ejemplo- con lo que se puede eliminar de la ecuación, y tendríamos, en alguna medida, la trayectoria escrita en la forma original, si a la componente en, cada instante, del vector posición lo llamamos e (espacio recorrido, que ya se ha dicho que es impropio). Sin embargo, esta es una simplificación bastante general pero engañosa, pues, nada más que elimina la dirección común de todos los vectores implicados, ¡no el sentido!; y ahí subyacen los problemas posteriores. Así, la trayectoria propuesta es sólo el resto de una simplificación en la que se sobreentiende la unidireccionalidad, y que determina la componente en cada instante de tiempo del vector de posición que, obviamente, puede ser positiva (avance) o negativa (retroceso). Por lo que siempre es necesario trabajar con la información completa que da el carácter vectorial de la trayectoria, haciendo las simplificaciones de forma adecuada y sin que se pierda información.

En consecuencia, las soluciones dadas inicialmente para la distancia recorrida en el ejercicio propuesto, representan más propiamente la distancia entre el lugar que el móvil ocupa en el instante inicial (o el origen) y el lugar que ocupa en el instante pedido. Es decir:

$$||\mathbf{r}(5 \text{ ó } 6)- \mathbf{r}(0)|| \text{ ó } ||\mathbf{r}(5 \text{ ó } 6) -0)||, \qquad (2)$$

respectivamente. El desplazamiento total D (distancia recorrida en el enunciado) entre los dos instantes elegidos será la suma de los desplazamientos elementales a lo largo de toda la trayectoria, que se pueden expresar -en el límite- a través del módulo del vector desplazamiento elemental /dr/.

Así, ese módulo, (cantidad siempre positiva), obtenido de la raíz cuadrada de la suma de las componentes del vector, (una en este caso) admite una solución con doble signo, es decir:

$$||dr|| = +/- ||v(0)-at||dt, \qquad (3)$$

cada uno de ellos con significado físico en un dominio determinado de tiempos (los que hacen positiva la solución), el positivo para tiempos menores que v(0)/a, (en lo sucesivo los módulos de los vectores se escribirán con letra normal) y el negativo para tiempos mayores. La integral para todo el desplazamiento debe entonces resolverse en dos, con los valores adecuados para cada caso y los límites correspondientes; esto es:

$$D=\int_0^t \|dr\| = +\int_0^{v/a}(v(0)-at)dt-\int_{v/a}^{t}(v(0)-at)dt \quad (4)$$

cuya expresión final es:

$$D = v(0)^2/a + at^2 - v(0)t., \qquad (5)$$

a través de la cual, se obtienen de forma rigurosa los datos correctos.

No debe sorprender el hecho de que la expresión (5) no dé una solución correcta en el origen; esto es, desplazamiento cero en tiempo cero, pues esta solución es sólo válida para tiempos mayores que el tiempo de retroceso v(0)/a, la solución para tiempos menores es la obtenida del primer término de la expresión (4). No existe una solución global para el desplazamiento pues su evolución con el tiempo tiene una discontinuidad en el punto v(0)/a, un punto anguloso (Fig 3a), (buen momento para fundamentar la utilidad de las matemáticas más elementales, otra disciplina reducida a formalismos); la componente en la dirección del movimiento -llamémosle

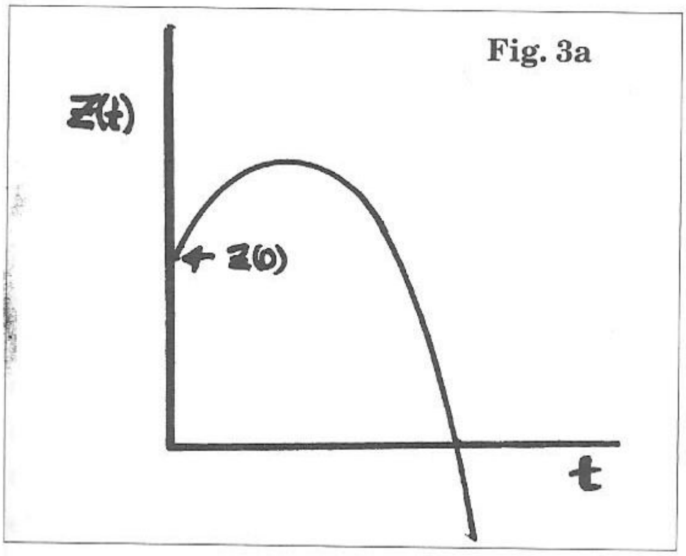


Fig. 3a

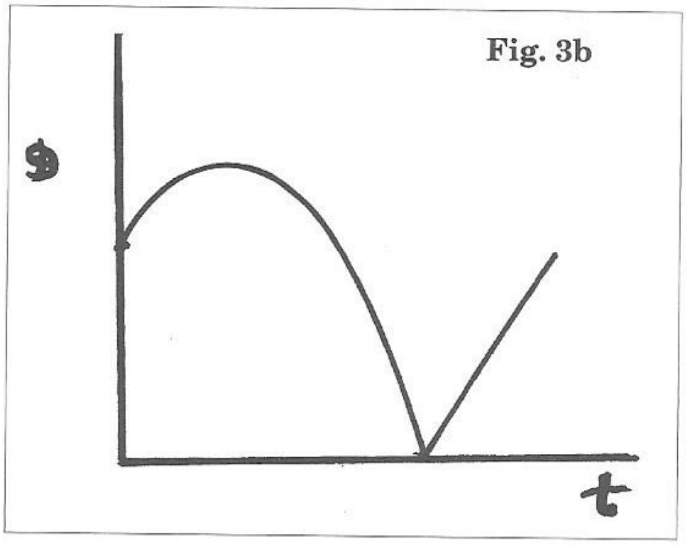


Fig. 3b

z(t)-, es continua y evoluciona como se muestra en la fig.3b.

Hay otra serie de aspectos que conviene resaltar es este sencillo ejercicio a través del análisis de la solución. En primer lugar, el hecho de que el movimiento es parabólico -de abertura nula-, incluso en el caso de aceleración positiva, que, a primera vista, parece realmente rectilíneo: En efecto, el caso de aceleración positiva tiene también un punto de retroceso, solo que en este caso, es virtual: corresponde a un tiempo negativo t=-v(0)/a, que físicamente, representa una situación anterior a la considerada como inicial en este caso (Fig 4a), y se puede interpretar como el estado posterior de un movimiento iniciado en ese instante anterior con velocidad inicial negativa, esto es, contraria a la aceleración de partida. En definitiva, una situación similar la la del caso que nos ocupa, girando la referencia 180 grados Fig. 4b .

Esto da pie a interesarse por la aparente confusión que puede implicar la elección del sistema de referencia. Sin embargo, de acuerdo con el princi-

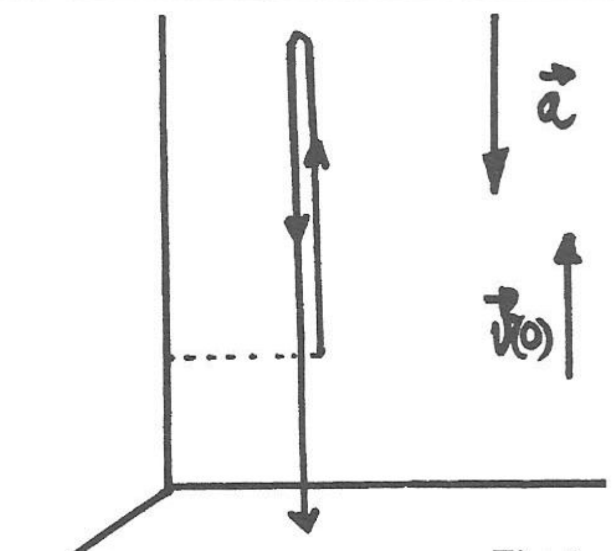


Fig. 4a

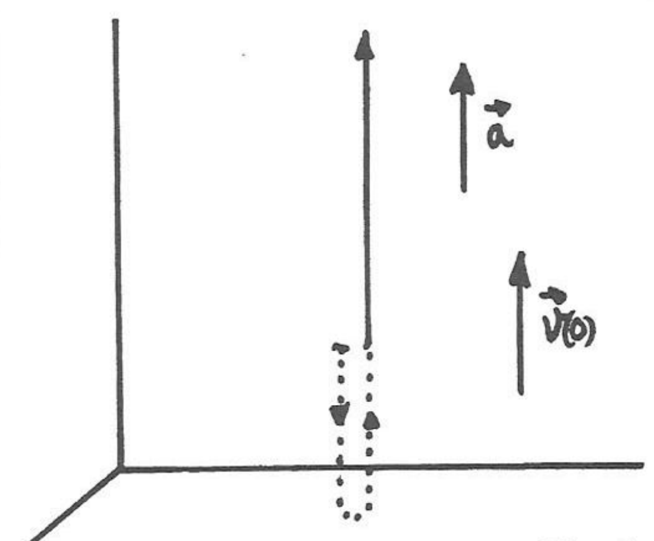


Fig. 4b

pio de relatividad, éste puede ser cualquiera con tal de que sea inercial, y solamente sirve como instrumento para resolver el problema y estudiar su solución. La elección adecuada de la referencia en el punto que se elija, es por tanto arbitraria, y esta arbitrariedad es necesario contemplarla, buscando la interpretación que corresponde a una u otra elección para el origen del sistema.

Igualmente puede elegirse un sistema de referencia que se desplace con la velocidad inicial del móvil -SR2-, referida a un sistema previo; es también, inercial, y válido por tanto. La solución en este caso, da un desplazamiento siempre creciente en el sentido negativo de la unidireccionalidad del movimiento; también es parabólico: el punto de retroceso en este caso corresponde al instante inicial, la trayectoria tiene componente negativa también, para tiempos virtuales negativos anteriores al instante inicial, y la velocidad en el proceso virtual es positiva, acercando el móvil al cero, para retroceder en el instante inicial real. (fig. 5)

Por otra parte, cabe hacer algunas extrapolaciones y comentarios de interés, sobre el valor de la distancia máxima de alejamiento del móvil del origen y relacionarlos con otros aspectos de la Física: En primer lugar, esta distancia, para este campo de aceleración constante **a**, $d_m = v(o)^2/2a$, no da una idea de las condiciones cinéticas de la partícula para abandonar el campo de aceleración **a** (considerado constante). Solo para velocidad infinita el retroceso no se producirá; o bien en campo cero, -partícula libre-.

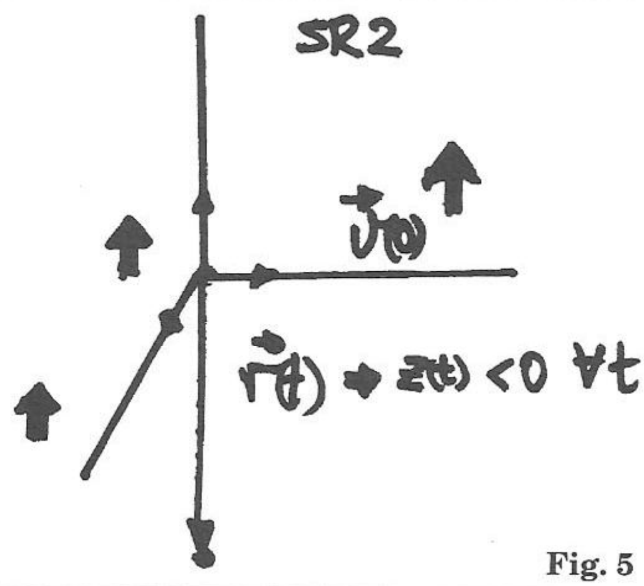


Fig. 5

Los campos en realidad, (el gravitatorio, en concreto, en este tiro vertical), son solo constantes localmente y, en consecuencia, esa imposibilidad física manifiesta de abandonar un determinado campo, una vez atrapada la partícula, se solventa; lo cual tiene una consecuencias muy ricas en cuanto a una discusión global sobre la estructura del cosmos en general, que se puede ampliar tanto como se quiera, pero no es el caso. Puede evaluarse localmente, cómo la variación del campo con la distancia afecta a la distancia máxima de alejamiento, sin más que diferenciar la expresión de dicha distancia respecto de a y considerar la diferencial como el incremento, así:

$$\Delta d_m = -[v(0)^2/a^2]\Delta a\ (\Delta m), \qquad (6)$$

donde $\Delta a(\Delta_m)$ representa en incremento de la aceleración (o decremento, si es negativo, como en este caso) sufrido por el alejamiento del centro del campo, que confiere como se ve, un aumento contrario a la distancia máxima, en la que la velocidad original y el campo inicial juegan un papel importante. (Buena ocasión para "subirse" al Everest a tomar datos concretos con los que contrastar y valorar la utilidad de la aproximación diferencial).

Si se expresa la aceleración en función de su causa, la fuerza, a través de la ecuación fundamental de la dinámica, esta distancia máxima de alejamiento nos da una idea cualitativa adecuada del concepto de masa inercial: propiedad de la partícula que mide su tendencia a mantenerse en su estado de movimiento. En efecto, la expresión de esta distancia máxima queda:

$$d_m = mv(0)^2/2F, \qquad (7)$$

siendo F la componente de la fuerza en la dirección del movimiento (que puede ser de cualquier naturaleza); así, independientemente de los valores de F y v(0), el móvil en cuestión, alcanza el punto de retroceso (cambio radical en su estado actual de movimiento) tanto más lejos (y tanto más tarde, cuanto mayor sea su masa. La única entidad que puede permitirse el "lujo", en este contexto, de no cambiar nunca, es el fotón, la partícula de luz con trayectoria siempre rectilínea (clásica) que por tanto ha de tener masa infinita; o viceversa, al tener masa infinita sigue una trayectoria rectilínea. Esto justifica, por ejemplo, la óptica geométrica y un acercamiento hacia la caracterización del fotón.

Por otra parte, si el término del numerador de la expresión (7), que es una energía cinética, se expresa para el fotón en la forma habitual (hv) siendo h la constante de Planck y v su frecuencia, puede analizarse el comportamiento de la luz en las proximidades de las estrellas y otros objetos del cosmos, tan de moda en la actualidad, para los que, la relación h/F (F en este caso es el campo gravitatorio en las proximidades del objeto), condiciona su "color", pues determina el valor de las frecuencias que pueden escapar del campo. Es decir, que no toda la luz tiene el mismo privilegio: las ondas con frecuencia más alta (RX, Rγ), son las que más posibilidades tienen de escapar a los grandes concentrados de materia del cosmos, frente a las señales de onda larga, que quedan atrapadas con mayor facilidad.En el caso del agujero negro, con un valor de F infinito, ningún valor de frecuencia puede escapar. Existe así la posibilidad de aproximar un ejercicio tan elemental a los temas de actualidad, de cierta resonancia social, a los que el adolescente es bastante receptivo, atrayendo algo más la atención que la rigurosidad de una Física más bien aburrida. Algunos ejemplos con datos reales pueden ser interesantes.

El análisis puede hacerse más completo, introduciendo la temperatura como generador de la velocidad inicial necesaria para el escape, en las proximidades de las superficies de cuerpos celestes que determinan la composición de su atmósfera; por que el tamaño de los átomos es como es, etc... sin necesidad de complicar los campos de fuerza generadores de la aceleración, justificando, mediante el contraste de los datos obtenidos, la necesidad de una ampliación.

En conclusión, se ha tratado de poner en evidencia lo rico y sencillo que resulta el análisis de este ejercicio, una vez familiarizados con el formalismo, siguiendo las indicaciones del artículo de D. Gil et al.(1), en contraste con la complejidad, confusión y artificialidad, que siempre generan las simplificaciones apriorísticas; todo ello, mediante el estudio aparentemente simple de un movimiento; aspecto no trivial, el del estudio del movimiento, que está en el origen de la propia Física, desde los griegos.

(1) D. Gil, J. Mtz-Torregrosa, L.Ramírez, A. Dumas, M. Goffard y A.M. Pessoa; *"La didáctica de la resolución de problemas en cuestión: elaboración de un modelo alternativo"*. Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales. **6**,73-85,(1992).